C2r Commentaire de rédaction - Objectif CAPES

Cinq pages de brouillon de concours : la seconde épreuve du CAPES externe 2004.

Dany-Jack Mercier [♭]

Ce document propose quelques réflexions sur la façon d'envisager l'utilisation du brouillon pendant une épreuve en temps limitée, mais n'a en aucun cas la prétention d'indiquer "LE" modèle de brouillon qu'il faut adopter : ce modèle n'existe pas et n'existera jamais.

Lorsque l'on s'intéresse à l'utilisation d'un brouillon, on constate deux écueils possibles :

▶ On peut faire "trop de brouillon" :

- recopier une partie de l'énoncé sur sa feuille de brouillon est stupide et constitue une perte de temps, sauf si l'on n'a pas d'idée pour débuter les recherches, et que l'on rentre mieux dans le problème en "ré-écrivant" les hypothèses.

- s'attarder trop longuement sur la rédaction "dans le brouillon même", pour ensuite... perdre un temps comparable à la recopier "au propre", est encore une perte de temps.

▶ On peut n'en faire pas assez :

- s'interdire d'écrire rapidement les choses au brouillon, s'interdire d'envisager son brouillon de la façon dont on serait "totalement à l'aise",

- ne rien écrire, et tenter de "tout faire de tête". Ne pas "utiliser son brouillon", c'est possible tant qu'on imagine le cheminement de la pensée, et dans ce cas, il est conseillé de rédiger immédiatement au propre en utilisant des feuilles blanches pour y "écrire des tests de rédactions" lorsque c'est nécessaire. Mais il ne faut pas d'à priori : tout vouloir écrire directement au propre ne permet pas d'aller aussi loin que l'on pourrait aller en s'autorisant à écrire "ce que l'on veut" au brouillon. La trace écrite, même seulement symbolisée de façon très personnelle, sert à préciser une définition, des notations, sert à débuter un raisonnement, à le poursuivre suffisamment longtemps sans perdre le fil. Ne pas vouloir utiliser son brouillon, c'est, à certains moments, voir moins loin et moins longtemps.

Utilisons donc un brouillon sympathique ! Gribouillons et utilisons les feuilles de brouillon comme un outil de recherche et de pré-rédaction. Et faisons quelques petites remarques sur les 5 pages d'un "brouillon réel" suivantes. Ces pages concernent le début de la seconde composition du CAPES externe 2004.

---

[0] [c2rccs0001] v1.00 http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[♭] IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret, BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159, France, dany-jack.mercier@univ-ag.fr

© 2004, D.-J. Mercier. Vous pouvez faire une copie de ces notes pour votre usage personnel.

Il est conseillé de numéroter ses questions et d'encadrer le numéro pour le voir de loin.

Chacune des pages est numérotée rapidement. On ne déchirera jamais ~~une feuille de brouillon ; on ne sait~~ jamais si elle ne sera pas activée un peu plus tard...

P.1

(iv) $y \in f(\bigcap A_i) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcap A_i \quad y = f(x)$

$\Downarrow$

$y \in \bigcap f(A_i)$

Réc., si $y \in \bigcap f(A_i)$, $\forall i \ \exists x_i \in A_i \quad y = f(x_i)$

mais $f(x_i) = f(x_j) \Rightarrow x_i = x_j$ (f bij)

Entourez les résultats à démontrer ou obtenus, dessinez des flèches ou des traits pour faciliter la relecture de votre brouillon et le passage "direct" à la rédaction au propre, à partir du seul brouillon...

(v) $\boxed{f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)}$?

$y \in f(A \setminus B) \Leftrightarrow \exists x \in A \setminus B \quad y = f(x) \rightarrow x \in A \rightarrow y \in f(A)$

↘ si l'on avait $y \in f(B)$,

~~alors~~ il exist. $b \in B$ / $y = f(b)$,

donc $y = f(x) = f(b) \Rightarrow x = b$ (bij.)

$\Downarrow$

$x \in B$

absurde.

donc $\boxed{y \in f(A) \setminus f(B)}$

$y \in f(A) \setminus f(B) \Rightarrow y = f(a)$ avec $a \in A$

si $a \notin B$ alors $y \in f(B)$, absurde.

donc $y = f(a) \in f(A \setminus B)$ ($a \in A \setminus B$ par)

Il vaut mieux prendre une nouvelle feuille de brouillon pour débuter une question. Mais une même question pourra bien entendu être traitée sur plusieurs pages de brouillon.

P2

- (A_i) part $\Rightarrow (f(A_i))$ part.

Aucune des parties $f(A_i)$ n'est vide puisque que aucun des A_i n'est vide. Pour tout i, j distincts,

Ecrivez mal, ce n'est pas grave tant que vous pouvez vous relire. Ayez pas peur de raturer, souligner... enfin rendez le document facilement exploitable pour votre future rédaction.

$$f(A_i) \cap f(A_j) = f(A_i \cap A_j) = f(\emptyset) = \emptyset$$

puisque f est bij. Enfin, tous puisque f est bij

$$\Omega = f(\Omega) = f\left(\bigcup A_i\right) = \bigcup f(A_i) .$$

Cela montre que $(f(A_i))$ est 1 part...

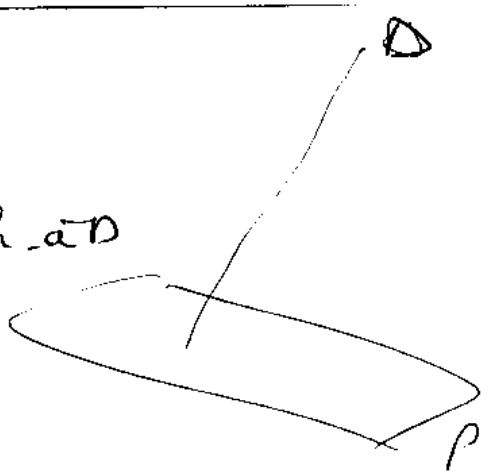
- $\Leftarrow$

Il suffit d'appliquer le résultat ci-dessus avec $f(A_i)$ à la place de A_i, et f^{-1} à la place de f en remarquant que $f^{-1}(f(A_i)) = A_i$ (puisque f est bij)

Le numéro de la question est marqué en entier !

3

I.1.a



Le dessin rapide peut rassurer et donner des idées...

Soit D l'axe commun à p_1 et p_2

La restr. de p à au plan $P = D^\perp$ orth. à D est un rot plane, et l'a sait que le gpe des rot. d'axe D de plan est commutatif (cf cours). Ainsi $p_1|_P$ et $p_2|_P$ commutent.

Les ~~appl~~ appl. lin. $p_1 \circ p_2$ et $p_2 \circ p_1$ vont

- coïncider ~~avec~~ avec l'Id. sur D
- coïncider sur le supplémentaire = P

donc seront égales.

Ici, la rédaction rapide faite au brouillon m'a rassurée, mais n'est pas nécessaire... Il valait sans doute mieux rédiger directement ce genre de question au propre, une fois que l'on a compris quels arguments utiliser !

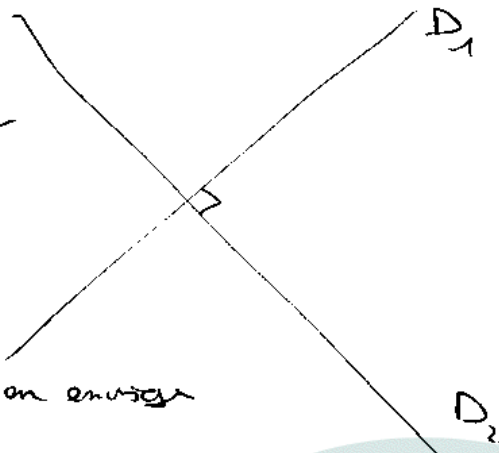
Je laisse le bas de la feuille en blanc et passerai à la question suivante sur l'AUTRE PAGE. N'économisez pas les feuilles de brouillon pendant l'épreuve. Les traits horizontaux, rapides à tracer, signalent de loin les débuts et les fins des questions.

I.1.b

Soit D la dte vect. orthog. à D_1 et à D_2, ~~...~~, autr. def

$$D = (D_1 \oplus D_2)^\perp$$

On vérifie que $\rho = \rho_1 \rho_2$ est le demi-tour d'axe D. Pour cela, on envisage 2 cas :



- Si $x \in$ ~~...~~ D,

$$\rho(x) = \rho_1(\rho_2(x)) = \rho_1(-x) = -(-x) = x$$

- Si $x \in D^\perp = D_1 \oplus D_2$,

NB : On peut se rappeler de ~~...~~ résultats sur les séries (on en a eu en cours ou en ex d'appl :)) et à connaître ~~...~~ ils peuvent disparaître !

F et G orthog. $\Rightarrow$ $s_F \circ s_G = s_{(F \oplus G)^\perp}$

F et G supp. $\Rightarrow$ $s_F \circ s_G = s_{F \cap G}$

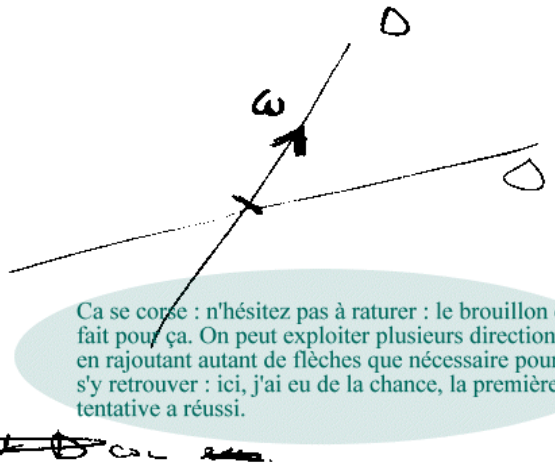
On note $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in D_i$, et l'on calcule

$$\rho(x) = \rho_1\rho_2(x_1) + \rho_1\rho_2(x_2) = \rho_1(-x_1) + \rho_1(x_2)$$
$$= -x_1 - x_2 = -x \quad \square$$

Pour ma part, un petit dessin me fait énormément plaisir et motive mes observations. Imaginez les deux droites dans l'espace et visualisez les actions des deux symétries... c'est génial ! Commencez par le cas simple où le point est dans le plan des deux droites, puis imaginez l'autre cas... c'est comme ça que l'on peut retenir ce résultat, mais chut, chacun a son truc ;)

Au brouillon, permettez-vous de "partir dans tous les sens", et de dessiner des lignes pour pouvoir ensuite vous relire facilement et rédiger directement à partir de vos "traces". Soyez inventifs... ici, la remarque m'a fait plaisir (il s'agit d'un apport du cours qui revient à l'esprit) mais n'est pas à placer au milieu de la preuve. Et on doit sans doute ne pas l'écrire le jour J ! N'oubliez pas que je taperai cette solution pour vous la proposer, et que je compte y mettre quelques remarques.

I, 2. a



*) $\Delta \neq D$
$\rho(\Delta) = \Delta$

$\pi = D \oplus \Delta$ est un plan vect glob. invariant par ρ

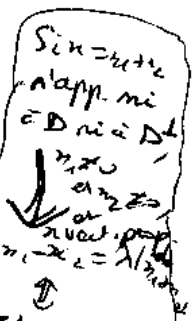
donc $\rho|_\pi \in O(\pi)$ et est une rot ou sym ref. ~~Sym~~ ~~$\rho|_\pi$ admet D~~ car ~~sym~~.

Mais $D \subset \mathrm{Inv}(\rho|_\pi)$, donc $\rho|_\pi$ est une réflexion / à D ~~Cl~~ ou bien l'identité.

① Si $\rho|_\pi = Id$, $\pi \subset \mathrm{Inv}\,\rho$ ce qui est absurde puisque la rot vect ρ ~~de~~ de E dist. de ~~Id_E~~ admet exact. 1 dte de vect inv (son axe !)

② Donc $\rho|_\pi$ = refle. / à D. Les seuls v.p. de $\rho|_\pi$ sont D et $D^\perp \cap \pi$.

Lemme : Dans le plan



$(\lambda-1)x_1 + (\lambda+1)x_2 = 0$ (par lin. ind.)

Or $\rho(\Delta) = \Delta$ ~~et~~ et comme $\Delta \neq D$

on aura nécessairement $\Delta = D^\perp \cap \pi$ et

cela prouve que Δ ~~est orth~~ et D sont orthogonaux

* Ainsi $D \perp \Delta$, et $\rho|_\Delta = \pm Id_\Delta$.

$\rho|_\Delta = Id_\Delta$ absurde (plan !! d'invariants)

donc $\rho|_\Delta = -Id_\Delta$ et ρ est un ½ tour !

$\lambda = \pm 1$ absurde.

donc pas de vect. prop. autre que ceux de D et $D^\perp$

Ca se corse : n'hésitez pas à raturer : le brouillon est fait pour ça. On peut exploiter plusieurs directions en rajoutant autant de flèches que nécessaire pour s'y retrouver : ici, j'ai eu de la chance, la première tentative a réussi.

Le lemme est trivial, et à ne pas détailler en concours. Mais pour approfondir son travail, et "en être sûr" pour soi-même et pour les oraux, il faut se poser ces questions "à l'entraînement" avant le jour J.